PSF Interpolation Using Principal Components

Mike Jarvis STEP collaboration meeting July 26, 2005

Overview

Each analysis scheme measures something about stellar shapes in order to correct galaxy shapes:

- KSB: Shear, smear polarizability matrices
- Shapelet Deconvolution: Shapelet coefficients of PSF
- BJ02 Reconvolution: Rounding kernel
- RegLens: Non-Gaussian PSF residual
- 🛛 etc.

Overview

The PSF shapes are generally not constant across an image.

So correction needed at galaxy location requires interpolation from nearby stars.

Polynomial Interpolation

- The easiest interpolation method is to simply fit each component of the PSF measurement as a polynomial in (x,y).
- Typically somewhere from 2nd to 4th order polynomials are required.

Lower order gives poor fit.

Not enough stars to fit higher order well.

Rational Functions

Henk and Ludo found that rational functions described their PSF variations better than simple polynomials for a given number of fitting coefficients.

Ser example:

$$R(x,y) = \frac{P^{(3)}(x,y)}{P^{(1)}(x,y)}$$

Dense Stellar Fields

- Henk also tried observing dense stellar fields to fit a high order function, and use the stars in individual fields for a lower order correction.
- Only somewhat effective, since different exposures have variations in the PSF pattern of order unity.

The variation from exposure to exposure tends to follow the same rough patterns.

A bunch will look one way, some others another way, etc.

Potentially, we could use all the stars in similar looking patterns to fit the patterns more accurately and to higher order.

- Presumably, these variations are due to physical differences at the telescope for the different exposures
 - How far above/below focus
 - Degree of tracking error
 - Flex of telescope pointing off-zenith
 - Vibration or flex due to wind, etc.

Describe PSF function as sum of several components:

$$F_i(x,y) = \sum_k \alpha_{ik} P_k^{(n)}(x,y)$$

Exposures are i index
Principal components are k index
n is order of polynomial function

Start with lower (say 4th) order fits:
 $F_i(x,y) = P_i^{(4)}(x,y)$ Treat each polynomial as a vector of coefficients.

Then all coefficients for all exposures are a matrix: A (N_{exp} × N_{coeff})

Perform Singular Value Decomposition on this matrix: A = USV

U is (tall) column-unitary
S is diagonal
V is square unitary.

Rows of SV are initial principal components (still 4th order functions).

 \oslash Elements of U are α coefficients.

$$F_i(x,y) = \sum_k \alpha_{ik} P_k^{(4)}(x,y)$$

Next, keep α's constant, and fit for higher (say 10th) order functions for P's.

 $F_i(x,y) = \sum_k \alpha_{ik} P_k^{(10)}(x,y)$

Optional improvements:

- Find better α's given the new higher order principal components. Can iterate solving for P's and α's a few times.
- Use rational functions instead of polynomials – will probably better describe the underlying function.
- Can use dense stellar fields in addition to lensing data.

Results

For CTIO survey, B mode now consistent with zero down to 1 arcminute.



PCs for CTIO Mosaic

PC 0: Static pattern.

- PC 1: Focus errors primary mirror astigmatism, and off-axis camera.
- PC 2: Guiding errors.
- PC 3: Unknown.
- PC 4: Probably variable trefoil as relative pressure on "hard points" varies.
- PC 5: Unknown.
- PC 6: Probably mirror or support flex correlated with hour angle.

\$\$\$\$\$\$\$	\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$		0000000000
\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$	\$\$\$\$\$\$\$\$	0000000000000	<i>6666666</i> 6666
\$ \$\$\$\$\$\$\$\$	<i>\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$</i>	<u>00000000000</u>	gaaaaaaaaa
\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$	<i>\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$</i>	0000000000	<i></i>
 	$\phi \phi $	0000000000	0000000000
$\overline{\phi}\phi\phi\phi\phi\phi\phi\phi\phi\overline{\phi}$	$\overline{\phi} \phi $	000000000000000000000000000000000000000	<u> </u>
$\phi \phi $	\$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$ \$	00000000000	<u> </u>
$\phi \phi $	\$00000000	<u> </u>	<u> </u>
$\phi \phi $	90000000000000000000000000000000000000	000000000000000000000000000000000000000	<u> </u>
$\phi \phi $	800000000000000000000000000000000000000	000000000000000000000000000000000000000	<u> </u>
<i>ΦΦΦΦΦΦΦΦΦ</i>	000000000000000000000000000000000000000	000000000000000000000000000000000000000	
$\bar{\varphi}\phi\phi\phi\phi\phi\phi\phi\phi\phi\phi$	0000000000000	000000000000000	<u>0000000000000000000000000000000000000</u>
₫₡₡₡₡₡₡₽	$\underline{0} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \$	$\underline{0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\$	<u>0000000000000000000000000000000000000</u>
₫₡₡₡₡₡₽	0000000000	<u>.</u>	<u>.</u>
<i>\$</i>	0000000000	00000000000	00000000000
<i>\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$</i>	0 0 0 0 0 0 0 0	00000000000	<u></u>
<i>\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$</i>	000000000	00000000000	8888866666
<i>∳∮∮∮∮∮∮∮∮</i> ∮	$\Phi 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0$		6 9999999998
\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$	$\Phi 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0$	<u>6666666666666666666666666666666666666</u>	~~~~~~~~ ~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
₽₽₽₽₽₽₽ ₽₽	$\begin{array}{c} \bullet \bullet$	<u> </u>	00000000000



F 1	F 1	F 1	F -
		[]	
		F	
		┣ –	
F	F		
\vdash \dashv	\vdash \dashv	\vdash \dashv	<u>⊢</u> –
⊢ ⊣		F	L –
F	F 1	F 1	F -
		+ -	
			L _

F 1	F 1	F 1	F 1
F		F	F
L _	L 4		
Г 1	Γ 1	Γ 1	Г
	[[F
			┝ ┥
F 1	F 1	F 1	F 1
			L _
⊢ ⊣	⊢ ⊣	┣	⊢ ⊣
1			

			_				_	_			_					_											_		_	_			_	_	_		_	_	_
	//	<u>'</u> '	· /	_	/	/	<u> </u>	-	4		-	ļ	-	, I	,	,	Ļ,	,	4		'	'	/	,	/	/	'	/	4		/	7	1	1	1	1	1		۲ ۱
				-	-	-	-	-			-					,	,	,	4	F	1	1	1	1	1	1	1	1	1	_/	1	1	1	1	1	I	I	I	ī
-			-	-	-	-	-	-	-							,	,	,	4		/	1	/	/	1	1	1	/	4	_	1	1	1	1	1	1	1	1	Д
-			-	-	-	-	-	-		ŀ	-				,	,	,	,	4	F	/	1	/	1	1	1	1	/	4	2	1	1	1	1	1	/	/	1	Ĩ
-	·		-	-	-	-	-	-		ŀ				,	,	,	,	,	4	F	1	1	/	1	1	/	1	/	4	-	7	1	1	1	/	1	/	1	4
-			-	-	-	-	-	-		Ì	-	,	1	,	,	,	,	,	-	F	1	1	/	1	7	7	7	/	4	7	1	7	1	1	7	/	/	1	7
-			-	-	-	-	-	-	-	ŀ	-	,	,	/	/	,	,	/	4	F	/	1	/	1	1	1	1	/	4	-	/	1	1	1	1	1	1	1	4
-	: -		-	-	-	-	-	-	_		/	1	,	/	/	/	/	/	4	-	1	/	/	/	/	1	1	/	4	4	/	1	7	1	1	1	/	1	4
-			-	-	-	-	-	-		F	/	/	/	/	/	/	/	/	4	F	/	1	/	/	/	/	/	/	4	-/	/	1	7	1	1	1	/	1	4
		- . [·	ú	-	-	Ĺ	-			/	Ĺ	/		/	/	Ĺ	/		-/	/	.í	/		/	/	Ĺ	/		- -/	/	Ĺ	/		/	/	Ĺ	/	- ۲
д			П	П		П		П	Щ	Щ	П	П	ГП		Т	Т	Т	ТТ	피	ш	П				Т	Т	Т		피	щ		П				Т	Т	Т	피
		<u> </u>		<u> </u>	-	-	Ļ	-	Ħ -	Н́л	T T ~	Ļ	· · · ·	Ļ	 /	· ·	Ļ	· ·	T _		· r /	',	/	7	/	77	Γ'	/	7		/	ΓŢ1	/		/	71	<u>ار</u>	/	뷧
		- <u>-</u>		_ 	-	- -	Ţ	· ·		H \ \ _	· · ·	, L	· T	, ,	· ·	·	, L	· ·		H Y L Y L	· · ·	') /	/ /	',' /	/	/	יר י	/		H	/ /	, ,	/	' /	 / /	 / /	/	/ /	
		- <u>-</u>		- -		-	Ţ' _ _	· · ·		$H_{I} = I_{I} = I_{I} = I_{I}$	-	, , ,	· · · ·	· · ·	· ·	· ·	Ţ	· ·		$H \searrow 1 \searrow 1 \lor 1$	/	', ' '	/	'' /	/	 / /	丁 7	/		$\exists \neg \neg$	/ / /	, , ,	/	רי י	/	/ / /	, , ,	/ / /	
		 			<u> </u>	- - -	Ţ 			$H_{I} = I_{I} = $		- - -	· · · ·	、 、 、	· · · ·	· · ·	ŢŢ Ź	· · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	', ' '	/	, , ,	/	/ / /	丁 7 7 7	/ / /		$H_{T}_{T_{T_{T}_{T_{T_{T}}}}}}}}}$	/ / /	, , ,	/ / /	, , ,	/ / /	/ / /	יך י י	/ / /	
	 	 							<u> </u>	$H {\scriptstyle } }{ } {\scriptstyle } {\scriptstyle } {\scriptstyle } {\scriptstyle } }{ }{\scriptstyle } {\scriptstyle } {\scriptstyle } }{ }{ }{ }{ } {\scriptstyle } {\scriptstyle } {\scriptstyle } {\scriptstyle } }{ }{ }{ }{ }{ } }{ }{ }{ }{ } }{ }{ }{ } $					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	ŢŢ , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		$H_{Y_1} \mathrel{\overset{\frown}{\to}} \mathrel{\overset{\bullet}{\to}} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to}} \mathrel{\overset{\bullet}{\to}} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to}} \mathrel{\overset{\bullet}{\to}} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to}} \mathrel{\overset{\bullet}{\to}} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to}} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} } \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} } \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} } \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} } \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} } \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} } \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} } \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} } \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} } \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset}{\to} \mathrel{\overset{\bullet}{\to} \mathrel{\overset}{\to} \mathrel{\bullet} \mathrel{\overset}{\to} \mathrel{\to} \mathrel{\bullet} \mathrel{\bullet} \mathrel{\bullet} \mathrel{\bullet} \mathrel{\bullet} \mathrel{\bullet} \mathrel{\bullet} \bullet$	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	', , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	·/ / /	· / / / /	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	Ţ, , ,	 		$\exists \neg \neg$, , , ,	, , , ,	/ / / /	', ' '	 / / /	 / / /	, , , ,	, , , ,	
							Ţ 		בייייייו יא יא יא וא ו						· · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		H ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ .	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	/ / / /	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· / / /		 / / /	Ţ, , , ,			H H	 	, , , , ,	/ / / /			, , , ,	רך י י י	/ / / /	
									ביייי ילוליל ללילי	$H_{Y_{\mathsfY}_{\mathsf$								· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		H ~	, , , ,	/ / / / /	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· / / / /		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	「 / / / /	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		<u> </u>	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· [-] / / /	/ / / /				, , , , ,	/ / / / /	
									<u> </u>									· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		H \ \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \		', , , , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· / / / / / / / / / / / / / / / / / / /	/ / / / /	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	「 、 、 、 、 、	 			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		/ / / / /	· · · · ·	, , , , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , , , , ,	/ / / / /	
									עריי יא יא יא וא יא יא יא יא יא יא יא יא יא דע											H \		· ;		·/· / / / / / / / / / / / / / / / / / / /	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	「 / / /	/ / / / / /			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	/ / / / /				, , , , , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	

Ē	LT \	$\left(\right)$	$\left(\right)$					ľ	Ì	Ţ	Ī	11 		L L L		ł	11		111	ŀ	Ē	,	Ļ	тт ,	<u>,</u>	· ·	· 1	Ļ	•	<u>-</u>	-	-	<u> </u>	-	<u> </u>	-	- -	Ĺ	\ \	Ŧ
ŀ	Ń	١	١	١	١	١	١	١	١	1	Ī	١	١	١	١	ł	ł	I	1	,											-	-	_	-	-	-	-	1		-
ļ		Ň	۰ ۱	Ň	γ.	`	、	、	,	Ę	Ę	١,	١,	1	1	1		,	,]	F.									-	Ę	_	_	_	_	_	_			Ţ
	7	۱	`	1	١	١	`	`	١	<u>`</u>	_	1	١	1	1	1	1	ı	' -	<u> </u>	<u> </u>	•	•	•	•	-					Ē	-	-	-	-			-		Ì
	λ	١	١	١	١	١	١	1	١	`	Ę	١	١	١	۱	1	١	١	1	'	Ŀ.	•	•	•	•	•	•	•	•		Ĺ	-	-	-	-	-	-	-	•	ì
ŀ	λ	١	١	١	١	١	١	١	١	4	ŀ	١	١	١	١	١	•	•	١	·-		•	•	•	•	•	•	•	•	•	ŀ	•	-	-	-	-	-	•	•	•_
-	<u>\</u>	١	١	١	١	١	١	١	١	`_	-`	•	•	•	•	•	•		•	·	-		-	-	-	-	-	-	-	•	F	-	-	-	-	-	-	-		-
-	N	١	١	`	`	`	`	`	•		-		-		-	-	-		-		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	_	、	、	、						-	-	-	-	-	-	-	-	-		_	-	-	-	-	_	-	_	_	_	_	- 1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
╞										-	-		_						_	-	-						_			-	-	_	_	_	_		_	_	_	-
		•	`	•	•	•	•	•	•	-	_	_	-	-	-	-	-	-		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
L	` LL	、 	Ļ	• 	i	•	•	Ŀ	•	 		·	Ĺ	<u>_</u>		-	 	Ĺ		1		-	ĺ,	- 	1	- 	_ 	Ĺ	- 	́П	-		ĺ		í	-	-	Ĺ	- -	Ъ
F	гΤ	тт	Т			П					ш	П	П				Т	Т		⊐⊓	ш					ТТ	ТТ	Т	ТТ					П			Т	ТТ	ТТ	
F	LT	тт •	Ļı	•	Ļ	тт •	· ·	Ļ	· ·	Ļ	H / -		Ļ	-	Ţ	- -	TT -	Ļ	 	Ŧ	H - -	-	<u> </u>		7		-	<u> </u>		Η/-	H - -	-	Ļ	- -	Ţ	- -	- -	Ļ	· ·	Ŧ
	LT	•	, Ĺı	•	ין י	·		Li	·	Щ. Ц.		-	Ļ	· · ·	, ,	тт -	тт -	Ţ	· · ·	Ħ T T T T	H ۲۰۰۰		Ţ		ר י	TT / /	T /	<u></u>			H	-	Ļ	- -	Ţ	тт - -	тт -	Ţ	+ - -	
		· ·	Ļı	•	י י	•	· ·	Ţ.	· ·	<u></u>		-	- -	-	- - -	· ·	- -	Ţ		Ħ T I I I I I I I I I I I I I I I I I I I	H_{1}		Ţ_ - -	T / / /	ין - -		T / / /				H $I $ $I $ $I $ I	-	- -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	· ·	
		· ·		•	· ·	· ·	· ·		· ·				, , ,	· · ·	- - -	-	- - -	- - -			<u> H </u>				- - -	T / / / /					$H_{1} \rightarrow h_{1} \rightarrow h_{1$		- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	· · ·	
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , ,	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				, , ,			· · · · ·		Ţ			<u>Η Λια Λια Λια Λια Λ</u>		<u> </u>	T / / / / /	<u> </u>	· · · · ·	· · · · · ·	Ţ			$H_{1} \rightarrow h \rightarrow $	· · · ·		T · · · ·	· · · ·	· · · ·	· · · · ·	· · · ·	- - -	<u> </u>
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· ·	•	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· ·	•	ביייייין יייייוי								ŢŢ 			<u>Η νι </u>		<u></u>					Ţ/ / / / /			$\exists \cdot 1 = 1$	· · · · ·		· · · ·	- - -	· · · · ·	· · · ·	- - -	· · · · ·	
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·												Ην							<u> </u>					- - -							
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	、 、 、 、	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	臣・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・											<u> </u>																			
		· · · · · /		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 <					╊											<u> </u>																			
		· · · · / / /		· · · · · / / /		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·															Αν ν																			

Ę	<u>г</u> г-	<u>'</u>	``	Ţ	、 、	, ,	Ĺı	, ,	Ļ	L.		ιļ		, I	•	' '	Ļ	11	,	L.	1	, I	11	' '	 	,	,	, ,	٩F	LT /	, ,	, ,	 /	,	 	,	Ι,'	,	Ļ
E		_	_			_	_	_	-	E										F.								-	┤┝			÷							-
E			-	-	`	`	•	•		Ľ	•	•	•	•	•	•	•	'	1	Ę	'	'	'	•	'	,	<i>,</i>	· ·-			, ,		,	<i>.</i>	,	'	,	,	<u>'</u>
-			-	-	-	-	-	-	÷		•	•	•	•	•	•		•	•	ŀ	•	•	•	•	,	•	,	· <u>·</u>	┥┝	<u>,</u>	, ,	,	,	,	,	,	,	•	•
Ŀ			-	-	-	-	-	-		Ŀ										Ľ.								- , ,	11		, ,	,	,		,				
F	_			_	_	_	-	-	_	-									-	F.								-	┥┝										_
Ĺ	_	-	-	-	-	-														L						-		· ·-	1	. [.]			-					-	_
F				-	-	-	-	-	-		•	•	•	•	•	•	•	•	•	ŀ	•	•	•	•	•	•	•	• •_	┥┝		•	•	•	•	•	•	•	•	<i>.</i> _
				-	-	-	-	-	-	-	-	•	•	•	•		•	•		Ę.	•	•	•	•	•	•	•	·	1	.•	•		•	•	•	•	•	•	
F	< .			_	_		-	-	_	-					、				-	L	、	、	、	、	、	、		- 、 <u>、</u>		•									-
┝									-	-									-	F								-	┥┝										_
Ľ		/ /		-	1	-	-	-		Ĺ	Ì	Ì	`	Ì	`	Ì	`	`		È	`	`	`	`	`	`	`	· ·- -	1	л [.]	• •		`	`	`	•	•	•	`_
$\left \right $	/ , 	í í		í	, 	/	Ĺ	, , ,			```	, Ì	、	, ,	`	`	È			h		ìì	х 1 1	$\frac{1}{1}$	х 1 1	N 1 1	È	\ 		× ·	、 , 		、 	ì	、 1 1	、 1 1	È	、 	, -
_										_																													
_																																							
F		ŗŢ	· /	7	- -	TT /	ŗ	11 1	뚜	□ -	. 	۱ļ	· † †			 •	Ļ	•		F	\ \	ΓŢ1	\ \	Ţ	++ \	++ \	Ĺ		F F	<u> </u>	, , ,		 •	Ţ	· ·	 	Ţ	 	Ч ,
		, ,	· /	丁 /	- -		Ţ	· ·	Т , ,	 - -	. - -	ŗÌ.	· · · ·		· ·	· · ·		•	- -	H \ - \ - \	· · · ·	, ,	· · ·	יד י	\ \ \	\ \ \	, (, ,		A F 4 F 4 F	<u> </u>		- T - T \	, ,	י <u>ן</u> י	++ 、	· · ·	, [,]	, ,	₽ - -
		, , , ,	· /	ין י	TT /	· ·	Ţ	· ·				<u>ب</u> ا ۱	· · · ·					•		H ^ ,	\ \ \	, Ú	\ \ \	<u>,</u>	\ \ \	\ \ \	, ,				, , , ,	- T - T \	, ,	ין י	, ,	тт ,	,	1 '	₽ ,
			· /	ין י	· ·	· ·	, ,	· · ·				· .	· · · ·	,	- T T		,	•	<u> </u>		\ \ \	, , ,	\ \ \	יָן ` `	\ \ \	\ \ \	, , (, ,			<u> </u>	, , , ,	- T - T \ \	· · ·	י <u>ן</u> י	, , ,	тт , ,	, , ,	· · ·	₽,
				丁 ~ ~ ~	- - -	· · ·	Ţ, , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · ·	· !	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	,	· · ·	₩		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , ,	· · ·	, , ,	\ \ \	\ \ \ \	, , ,					, , ,	, , ,	· ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	+ + , , ,	, , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	₽ ,
						· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	Ţ , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· . , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 - , ,	, , ,	· · ·	\	H~1 1~1 1~1 1~1 1~1	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , ,	\ \ \ !	\ \ \ \	, , , ,			<u> </u>		- T 1	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
					· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· .	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 - - - -			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	╊		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	·〔'	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	·, , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·					- - - - -	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	$\square \square $
					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· [· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		H1	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· [· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	、 、 、 、					- - -	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· .	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	·〔' 、、、、 、 、 、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、、	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	(, , , , ,					· · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , , , ,	· · ·	╊┐╷╹┐╻╴╴╵╴╷╶╴╵╱ │ ╱ ╷ ╱ ╷
						· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	Ţ / / / /	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		H1111-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , , , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
												· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		<u> </u>	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , , , , , , , , , , , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	·, · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , , , , , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
												· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	「「 ・ ・ ・ ・ ・	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	╊. ヿ. ヿ . ヿ . ヿ . ヿ . ヿ . ヿ . ヿ	<u> </u>			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	<pre> (''' ' ' ' ' ' ' ' ' ' ' ' ' ' ' ' ' '</pre>						· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	

F	 /	/	ļ	· · · ·	Ţ	1 1	· ·	Ļ		4	۲.		Ţ	ГП 、	Ĺ	· · ·	\ \	Ĺ	· · ·	Ŧ	Ę		Ĺ	1 T \	Ţ	1 T \	\ \	ĹIJ	\ \ \	₽F	TT ۱	11		11	1	11	11	Ļ	i i i	뛰
	-										F										F									1[_									
┝	/	/	1	1	1		•	•	•	·-	ŀ	•	`	`	`	ì	`	`	`	4	F	`	`	`	`	`	`	١	1 1	┥┝	_`	١	١	١	١	١	١	I	1	'-
	<u>/</u>	/	1	,	,	,					Ŀ	<u> </u>	•	•	•	`	`	`	、 <u>·</u>	_	Ŀ	`	`	`	•	`	`	١.	<u> </u>		<u>`</u>	١	١	•	•	١	١	ı.	ı	,
ŀ										-	╞									-	F									┥┝	_									_
F	/	/	/	/	1	,	,	•	•	·-	F	•	•	•	`	`	`	`	•	<u>`</u>	F	ì	`	`	`	`	`	`	<u>،</u> ۱		-`	`	`	•	•	'	•	'	•	'-
F	J	1	1	,	,	,	,	•	•	•	Ŀ	•	•	•	•	•	•	•	•		Ŀ	•	•	•	•	•	•	•	۰ ۱ <u>۱</u>		_`	,	•	•	•	•	•	•	•	-
┝	_	,	,	,	,					-	\vdash	-							-		F								_	┥┝										_
ľ	-1	'	'	,	,		•	•	·	ĺ	Ľ		•	•	•	•	•	•	•		Ľ	•	•	•	•	•	•	•	•••	11		•	•	·	•	•	•	•	•	-
╞	.1	1	1	1	,	•	•	•	·	•	-	•	•	-	-	•	-	-	•	·	ŀ	•	•	•	-	•	•	•	• •	┥┝	_•	•	•	•	•	•	•	•	•	•_
		1	,	,	,					_	E		_	_	_	-	_	_		-	Ľ.	-	-	-		-					-			-			-			_
	-	•	·								F	-								_	F									┤┟	_									_
┝	-1	I	ł	'	ı	•	·	•	•	•-	-	-	-	-	-	-	-	-		4		-	-	-	-	-	-	-		┥┝		-	-	-	-	-	-	-	-	
	- -1	ī	,		۰.					_	Ĺ		÷	_		_	_	-		_	Ľ	_	÷	_		-	-	-][_	-	÷	-		-	-		-	_
L	11						11		11	Ш	L					11	11		111	Ш	Lu					11	11			ונ		11				11	11			Ш
F	LΊ	Т				Т	ТТ	П	11	미	Р			гп			П	11		Ŧ	Г					11		гп		Ŧ F	Т		Т	ТТ	Т	11	Т	ТТ	П	미
F	тт ! -	1	Ţ	' I I '	' '	· ·	. .	Ļr	тт	Ч -	[- -	<u>- </u>	Ţ	- T T -	<u> </u>	- -	•	ļ,		-	 -		Ţ	- -	<u> </u>	- -	-	<u>-</u> -				+ + •	Ţ	•	<u>'</u>	· ·	•	<u>.</u> ,		<u>Ч</u> -
	<u>_</u> ! -	1	, ,	· · · ·	' '	· ·	· ·	<u>г</u> .	· ·			- 1 T - -	י <u>ן</u> י -	 - -	<u> </u>	- -	- -			H 	- - -		<u>T</u> ' -	- -	<u>-</u>	- -	- -	-			 	• •			<u>י</u> ן	- -	•		· ·	Ч. - -
	<u>_</u> - - - -	1	' '	· · · ·	יד י י	· ·	· ·		· ·	- 		-	י <u>ן</u> י -	 - -	<u>-</u> 1	- - -	- -		TT <u>L</u>	₩. 	- - - -	- -	<u>_</u> '	- -	<u>-</u>	- -	- -	-	 -	₩ 6 	 	•		- -	ין	· ·	·	<u>,</u>	· ·	F
	<u> </u>	1	' '	, ייי י	, , ,	· ·	· ·		· · · · · ·	Ħ			<u>י</u> י - -	- T T - -	- <u>-</u>	- - -	-	-	• • •			- - -	<u>_</u>	- -	- -	- -	- - -	-			 	• • •			· ·	· ·	· ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	<u></u> <u> </u>
	<u> </u>	1	1 1 1	, , , ,	, , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • •		· · ·	₽		 - -	<u>ب</u> ر - -	 - - -	- - -	- - -	- - -	- - -				- -	<u> </u>	- - -	- - -	- - -	- - -	 				·		- -	יד י י	- -	· · ·	· ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
	+ T - - - - - - - -	1	· · · · ·	, , , ,	, , , , ,	++ , , , , ,	• • • •		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				- - -	 - -	<u>-</u> - - -	- - -	- -		 				 	- -	- - -	- - -	- - -	- -			 - - - - - -	• • •		• • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		++ 	· ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	⊒` ı ` ı ' l ı ` ı ``
	+ + - - - - - - - - - - - -	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	· · ·	, , , ,	• • •		• • •	╊. ╴		- - - -	- - -	- - -	- - -		- -	- - -	 			- -	- -	- -	- -	- -	- - -	- -				• • •			- - - -	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	- -		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +	1	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • •		• • •	╊			- - - -	- - - - -	- <u>-</u>	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·		- · ·			- -	- -	- -	- -	- -	- -	- - -				• • •			• • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • •	· ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	╊			- - - -		- - - -	· · · · ·	· · · ·	· · · ·	- · ·			- - ,	- -	- -	- - ,	- -	- -	- -				· · · · · · · ·	- - - -	• • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	- -	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	, , , , ,	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • •		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	╊. ヿ. ヿ ヿ ヿ . ヿ . ヿ . ヿ . ヿ		 - - - - -	יַדַי - - - -		· T	· · · · · · · · ·	· · · · · ·	- - -				- - ,	- -	- -	- -	- -		-				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	- - -	- - -	· ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		• • • •				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	- - - - - -	- <u>-</u> - - -	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	- - -				- - ,	- -	- -	- - -	- -	- -	- -				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • •	- - - - -	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	- - - - -	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			θ	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	• • • • • • •	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • • • • •	- - -	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	[[
				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • • •	- -	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	╊			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	- - - -			<u> </u>	- -	- -	- -	- -	- -	- -	 -				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	- - - -	- - - - - -	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	

There are three places systematic errors can result using PCA:

- Principal components can be estimated incorrectly.
- One can use too few principal components to fully model patterns.
- Coefficients (α) can be estimated incorrectly.

- Principal components can be estimated incorrectly:
 - The systematic errors on the principal components decrease as 1/√N, where N is the total number of stars used in fits.
 - This systematic error decreases for larger surveys along with statistical errors.

- Too few principal components to fully model patterns.
 - We use PCs with singular values > 0.01 times largest singular value.
 - This gives about 25-30 PCs.
 - The optimal number to use will require some more investigating.
 - Trade-off: more PC's are each fit slightly less well.

 \oslash Coefficients (α) can be estimated incorrectly.

- α is only fit from stars in a single exposure.
- Need (minimum) as many stars as PCs.
- Errors (roughly) inversely proportional to total S/N of stars in exposure.
- This systematic does not decrease for larger surveys.

 \oslash Coefficients (α) can be estimated incorrectly.

- Only affects correlation function when both galaxies are from same exposure.
- Can completely remove it by only using pairs from different exposures.
- Errors in α's are then statistical error, not systematic.